2.6 Κλίση και κατά κατεύθυνση παράγωγοι

Στην Ενότητα 2.1 μελετήσαμε τα γραφήματα των πραγματικών συναρτήσεων. Σε αυτή την ενότητα θα συνεχίσουμε τη μελέτη τους, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού. Ειδικότερα, θα χρησιμοποιήσουμε την κλίση για να βρούμε έναν τύπο για το εφαπτόμενο επίπεδο σε μια επιφάνεια στάθμης.

Κλίσεις στον $\mathbb{R}^3$

Ας θυμηθούμε τον ορισμό.

Ορισμός Η κλίση Αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, η ***κλίση*** της f στο (x, y, z) είναι το διάνυσμα του χώρου που δίνεται από την

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Αυτό το διάνυσμα συμβολίζεται επίσης με $\nabla f(x, y, z)$. Επομένως, ∇f είναι απλώς ο πίνακας της παραγώγου $\mathbf{D}f$, γραμμένος ως διάνυσμα.

Παράδειγμα 1 Έστω $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$, η απόσταση του (x, y, z) από το $\mathbf{0}$. Έχουμε

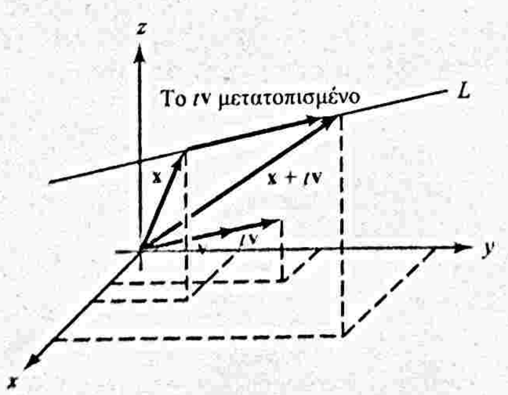
$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r},\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι το σημείο (x, y, z). Άρα το ∇f είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του (x, y, z). ▲

Παράδειγμα 2 Αν $f(x, y, z) = xy + z$, τότε

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y, x, 1).$$ ▲

Ας υποθέσουμε ότι $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση. Έστω $\mathbf{v}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ σταθερά διανύσματα και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$. Το σύνολο των σημείων της μορφής $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, είναι η ευθεία L που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{v}$ (βλ. Σχήμα 2.6.1).



Σχήμα 2.6.1 Η εξίσωση της L είναι $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

Κατά κατεύθυνση παράγωγοι

Η συνάρτηση $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ αναπαριστά τη συνάρτηση f περιορισμένη στην ευθεία L. Για παράδειγμα, αν ένα πουλί πετάει κατά μήκος αυτής της ευθείας με ταχύτητα $\mathbf{v}$, οπότε η θέση του τη χρονική στιγμή t είναι $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$, και αν η f αναπαριστά τη θερμοκρασία σαν συνάρτηση της θέσης, τότε $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ είναι η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή t. Μπορούμε να θέσουμε το εξής ερώτημα: Πόσο γρήγορα μεταβάλλονται οι τιμές της f κατά μήκος της ευθείας L στο σημείο $\mathbf{x}$; Επειδή ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης δίνεται από μια παράγωγο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι η τιμή της παραγώγου αυτής της συνάρτησης του t για $t = 0$ (όταν $t = 0$, το $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ γίνεται $\mathbf{x}$). Αυτή θα ήταν η παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}$ κατά τη διεύθυνση της L, δηλαδή του $\mathbf{v}$. Η έννοια αυτή διατυπώνεται αυστηρά ως εξής.

Ορισμός Κατά κατεύθυνση παράγωγοι Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, τότε η ***κατά κατεύθυνση παράγωγος*** της f στο $\mathbf{x}$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$ δίνεται από την

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0}$$

αν υπάρχει.

Στον ορισμό της κατά κατεύθυνση παραγώγου, κανονικά επιλέγουμε ως $\mathbf{v}$ ένα *μοναδιαίο* διάνυσμα. Σε αυτή την περίπτωση κινούμαστε κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ με μοναδιαία ταχύτητα και καλούμε την $\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0}$ ***κατά κατεύθυνση παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση*** του $\mathbf{v}$.

Θα εξηγήσουμε τώρα γιατί στον ορισμό της κατά κατεύθυνση παραγώγου επιλέγουμε κάποιο *μοναδιαίο διάνυσμα*. Ας υποθέσουμε ότι η f μετράει τη θερμοκρασία σε βαθμούς και ότι μας ενδιαφέρει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θερμοκρασία καθώς κινούμαστε κατά μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Αν μετράμε την απόσταση σε μέτρα, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θα μετριέται σε βαθμούς ανά μέτρο. Ας υποθέσουμε, για απλότητα, ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό —φερ' ειπείν, δύο βαθμούς ανά μέτρο— καθώς κινούμαστε κατά μια δεδομένη κατεύθυνση $\mathbf{v}$ με αφετηρία το $\mathbf{x}$. Επομένως, όταν προχωράμε ένα μέτρο, η θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά δύο βαθμούς. Δηλαδή,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) = 2.$$

Μια τέτοια σχέση θα ισχύει μόνο όταν το $\mathbf{v}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, ώστε να αποτυπώνεται το γεγονός ότι προχωράμε κατά *ένα* μέτρο. Γενικότερα, ο ορισμός της κατά κατεύθυνση παραγώγου θα μετράει πραγματικά μόνο τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς την απόσταση επί μιας ευθείας κατά μία δεδομένη κατεύθυνση αν το $\mathbf{v}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος μπορεί επίσης να οριστεί μέσω του τύπου

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Θεώρημα 12 *Αν η $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος στο $\mathbf{x}$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ δίνεται από την*

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{v} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\right] v_3,$$

όπου $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Απόδειξη Έστω $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, οπότε $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Από την πρώτη ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας, $(d/dt)f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$. Όμως, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ και $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, άρα

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

που είναι αυτό που έπρεπε να αποδείξουμε. ∎

Σημειωτέον ότι δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ευθείες για να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της f κατά κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση $\mathbf{v}$. Πράγματι, για μια γενική διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ με $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ και $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Παράδειγμα 3 Έστω $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής της f κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{στο σημείο} \qquad (1, 0, 0).$$

Λύση Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 12,

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = (2xe^{-yz}, -x^2 z e^{-yz}, -x^2 y e^{-yz}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

ο οποίος, στο σημείο $(1, 0, 0)$, γίνεται

$$(2, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

▲

Παράδειγμα 4 Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f του προηγούμενου παραδείγματος κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

Λύση Το $\mathbf{w}$ δεν είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Αντικαθιστώντας το $\mathbf{w}$ με

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

και συνεχίζοντας όπως στο Παράδειγμα 3, παίρνουμε και πάλι ως απάντηση $2/\sqrt{3}$. ▲

Κατευθύνσεις ταχύτερης αύξησης

Το Θεώρημα 12 μας δίνει επίσης τη γεωμετρική σημασία της κλίσης:

Θεώρημα 13 Αν $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, η κατεύθυνση του $\nabla f(\mathbf{x})$ είναι η κατεύθυνση κατά την οποία η f αυξάνεται ταχύτερα.

Απόδειξη Αν $\mathbf{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, ο ρυθμός μεταβολής της f κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{n}$ είναι $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{n}$ και $\nabla f(\mathbf{x})$. Ο ρυθμός είναι μέγιστος όταν $\theta = 0$, δηλαδή όταν τα $\mathbf{n}$ και ∇f είναι παράλληλα. [Αν $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ο ρυθμός μεταβολής είναι 0 για οποιοδήποτε $\mathbf{n}$.] ∎

Με άλλα λόγια, αν θέλουμε να κινηθούμε κατά μια κατεύθυνση κατά την οποία η f αυξάνεται όσο το δυνατόν ταχύτερα, θα πρέπει να προχωρήσουμε κατά την κατεύθυνση $\nabla f(\mathbf{x})$. Με αντίστοιχο τρόπο, αν θέλουμε να κινηθούμε κατά μια κατεύθυνση κατά την οποία η f *ελαττώνεται* όσο το δυνατόν ταχύτερα, θα πρέπει να κινηθούμε κατά την κατεύθυνση $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Παράδειγμα 5 Κατά ποια κατεύθυνση με αφετηρία το $(0,1)$ αυξάνεται ταχύτερα η $f(x,y) = x^2 - y^2$;

Λύση Η κλίση είναι

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$

άρα στο $(0,1)$ είναι

$$\nabla f|_{(0,1)} = -2\mathbf{j}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 13, η f αυξάνεται ταχύτερα κατά την κατεύθυνση του $-\mathbf{j}$. (Καταλαβαίνετε γιατί αυτή η απάντηση είναι συνεπής με το Σχήμα 2.1.9;) ▲

Κλίσεις και εφαπτόμενα επίπεδα σε σύνολα στάθμης

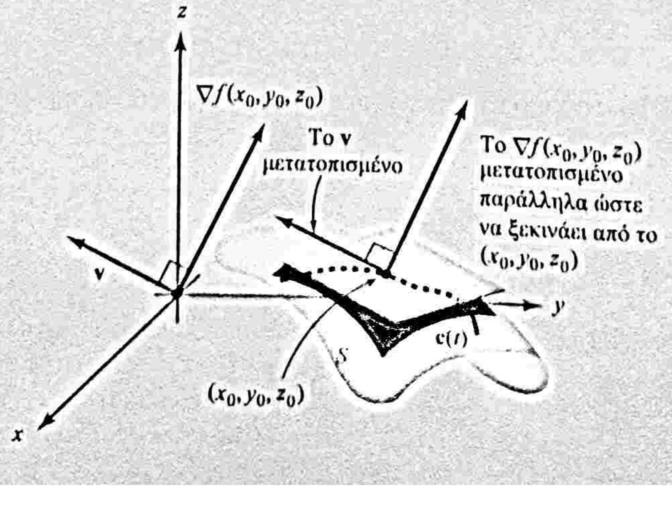
Θα βρούμε τώρα τη σχέση μεταξύ της κλίσης μιας συνάρτησης f και των επιφανειών στάθμης της. Η κατεύθυνση της κλίσης είναι η κατεύθυνση κατά την οποία οι τιμές της f μεταβάλλονται ταχύτερα, ενώ μια επιφάνεια στάθμης απαρτίζεται από τις κατευθύνσεις κατά τις οποίες δεν μεταβάλλεται καθόλου. Αν η f έχει αρκετά καλή συμπεριφορά, η κλίση και η επιφάνεια στάθμης θα είναι κάθετες μεταξύ τους.

Θεώρημα 14 Η κλίση είναι κάθετη στις επιφάνειες στάθμης Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση C^1 και έστω ότι το (x_0, y_0, z_0) ανήκει στην επιφάνεια στάθμης S που ορίζεται από την $f(x,y,z) = k$, όπου k είναι μια σταθερά. Το $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στάθμης με την εξής έννοια: Αν $\mathbf{v}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε μια διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ της S στο $t = 0$ με $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, τότε $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$ (βλ. Σχήμα 2.6.2).

Απόδειξη Έστω ότι η $\mathbf{c}(t)$ ανήκει στην S, οπότε $f(\mathbf{c}(t)) = k$. Έστω ότι το $\mathbf{v}$ είναι όπως στην υπόθεση, οπότε $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Από το γεγονός ότι το $f(\mathbf{c}(t))$ είναι σταθερό ως προς t και τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}.$$

■



Σχήμα 2.6.2 Γεωμετρική σημασία της κλίσης: το ∇f είναι ορθογώνιο με την επιφάνεια S επί της οποίας είναι σταθερή η f.

Αν μελετήσουμε το συμπέρασμα του Θεωρήματος 14, θα διαπιστώσουμε ότι είναι λογικό να *ορίσουμε* ως εφαπτόμενο επίπεδο της S το επίπεδο που είναι ορθογώνιο με την κλίση.

Ορισμός Εφαπτόμενα επίπεδα επιφανειών στάθμης Έστω S η επιφάνεια που αποτελείται από τα (x, y, z) για τα οποία $f(x, y, z) = k$, όπου k είναι μια σταθερά. Το ***εφαπτόμενο επίπεδο*** της S σε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) της S ορίζεται από την εξίσωση

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{1}$$

αν $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

Αυτός ο ορισμός αποτελεί επέκταση του ορισμού που δώσαμε νωρίτερα για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος μιας συνάρτησης (βλ. Άσκηση 15 στο τέλος αυτής της ενότητας).

Παράδειγμα 6 Υπολογίστε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας που ορίζεται από την $3xy + z^2 = 4$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

Λύση Έχουμε $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ και $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$, το οποίο στο $(1, 1, 1)$ είναι το διάνυσμα $(3, 3, 2)$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το

$$(3, 3, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0,$$

δηλαδή

$$3x + 3y + 2z = 8. \qquad \blacktriangle$$

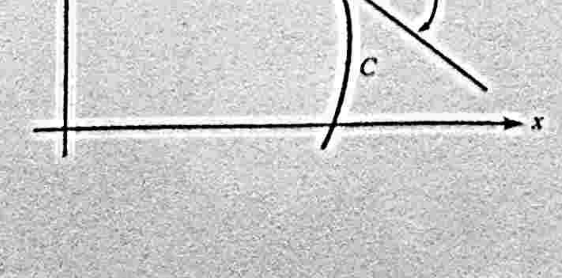
Στο Θεώρημα 14 και στον ορισμό που το ακολουθεί, θα μπορούσαμε κάλλιστα να είχαμε εργαστεί στις δύο διαστάσεις αντί στις τρεις. Επομένως, αν $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και θεωρήσουμε την *καμπύλη* στάθμης

$$C = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\},$$

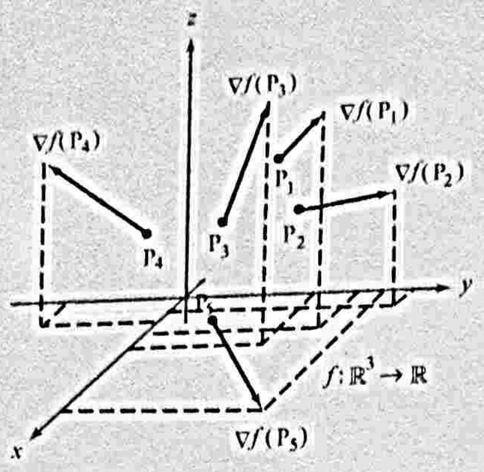
τότε το $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην C για οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0) της C. Με αντίστοιχο τρόπο, αν $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, η εφαπτόμενη ευθεία της C στο (x_0, y_0) έχει εξίσωση

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία είναι το σύνολο των σημείων (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση (2) (βλ. Σχήμα 2.6.3).



Σχήμα 2.6.3 Στο επίπεδο, η κλίση ∇f είναι ορθογώνια με την καμπύλη f = σταθερά.

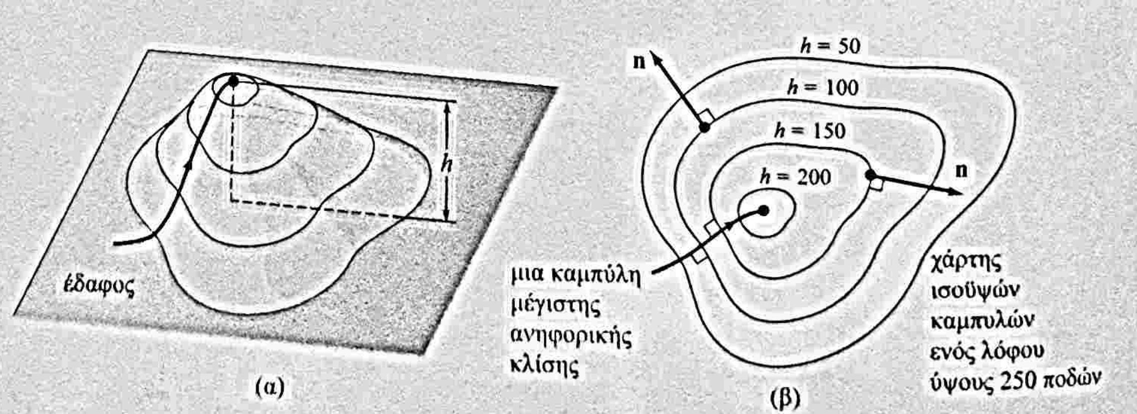


Σχήμα 2.6.4 Η κλίση ∇f μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$. Σε κάθε σημείο P_i, το $\nabla f(P_i)$ είναι ένα διάνυσμα με αφετηρία το P_i.

Το διανυσματικό πεδίο κλίσεων

Πολλές φορές ονομάζουμε το ∇f ***διανυσματικό πεδίο κλίσεων***. Η λέξη «πεδίο» σημαίνει ότι το ∇f αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f. Στο Σχήμα 2.6.4 περιγράφουμε την κλίση ∇f όχι σχεδιάζοντας το γράφημά της, το οποίο, αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, θα ήταν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^6$ —δηλ. το σύνολο των πλειάδων $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$— αλλά αναπαριστώντας το $\nabla f(\mathrm{P})$, για κάθε σημείο P, σαν ένα διάνυσμα με αφετηρία το σημείο P αντί την αρχή των αξόνων. Όπως και το γράφημα, αυτή η μέθοδος απεικόνισης του ∇f περιλαμβάνει το σημείο P και την τιμή $\nabla f(\mathrm{P})$ στην ίδια εικόνα.

Το διανυσματικό πεδίο κλίσεων είναι ιδιαίτερα σημαντικό από γεωμετρική σκοπιά. Δείχνει την κατεύθυνση κατά την οποία αυξάνεται ταχύτερα η f και την κατεύθυνση που είναι ορθογώνια με τις επιφάνειες στάθμης (ή τις καμπύλες στάθμης στο επίπεδο) της f. Το γεγονός ότι τα κάνει και τα δύο αυτά μαζί είναι μάλλον λογικό. Για να το κατανοήσετε, φανταστείτε έναν λόφο σαν αυτόν του Σχήματος 2.6.5(α). Έστω h η συνάρτηση ύψους, μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αν σχεδιάσουμε τις καμπύλες στάθμης της h, θα πάρουμε απλώς τις ισοϋψείς καμπύλες του λόφου. Θα μπορούσαμε να τις φανταστούμε σαν διαδρομές στάθμης πάνω στον λόφο [βλ. Σχήμα 2.6.5(β)]. Ένα πράγμα πρέπει να είναι προφανές σε όποιον έχει κάνει πεζοπορία: Για να φτάσει στην κορυφή του λόφου μέσω της συντομότερης δυνατής διαδρομής πρέπει να περπατήσει κάθετα στις ισοϋψείς καμπύλες.[5] Αυτό συμφωνεί με τα Θεωρήματα 13 και 14, τα οποία λένε ότι η κατεύθυνση ταχύτερης αύξησης (η κλίση) είναι ορθογώνια με τις καμπύλες στάθμης.



Σχήμα 2.6.5 Μια φυσική αναπαράσταση των δύο προτάσεων (α) ότι το ∇f είναι η κατεύθυνση ταχύτερης αύξησης της f και (β) ότι το ∇f είναι ορθογώνιο με τις καμπύλες στάθμης.

[5] Θεωρούμε ότι η ταχύτητα βάδισης είναι ίδια σε όλες τις κατευθύνσεις. Ασφαλώς, οι πεζοπόροι γνωρίζουν ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα ρεαλιστικό.

Παράδειγμα 7 Η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια μοναδιαία μάζα m που βρίσκεται στο σημείο (x, y, z) από μια μάζα M που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του $\mathbb{R}^3$ δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα, από τον τύπο

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{n},$$

όπου G είναι μια σταθερά, $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ είναι η απόσταση του (x, y, z) από την αρχή των αξόνων και $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, που είναι το διάνυσμα θέσης που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο (x, y, z).

Παρατηρήστε ότι $\mathbf{F} = \nabla(GmM/r) = -\nabla V$, δηλαδή η $\mathbf{F}$ είναι το αντίθετο της κλίσης του βαρυτικού δυναμικού $V = -GmM/r$.[Σ.τ.Μ.: Ακριβέστερα, V είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια.] Αυτό μπορεί να επαληθευτεί όπως στο Παράδειγμα 1. Προσέξτε ότι η $\mathbf{F}$ έχει κατεύθυνση προς τα μέσα, προς την αρχή των αξόνων. Επιπλέον, οι επιφάνειες στάθμης του δυναμικού V είναι σφαίρες. Το διανυσματικό πεδίο κλίσεων $\mathbf{F}$ είναι κάθετο σε αυτές τις σφαίρες, πράγμα που επιβεβαιώνει το συμπέρασμα του Θεωρήματος 14. ▲

Παράδειγμα 8 Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S που δίνεται από την $z = x^2y^2 + y + 1$ στο σημείο $(0, 0, 1)$.

Λύση Έστω $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$ και ας θεωρήσουμε την επιφάνεια στάθμης που ορίζεται από την $f(x, y, z) = 0$. Επειδή αυτό είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) με $z = x^2y^2 + y + 1$, το συγκεκριμένο σύνολο στάθμης συμπίπτει με την επιφάνεια S. Η κλίση δίνεται από την

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = 2xy^2\mathbf{i} + (2x^2y + 1)\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

οπότε

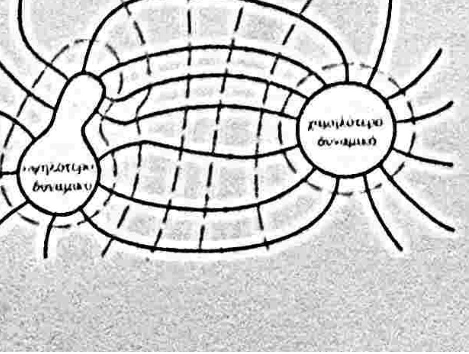
$$\nabla f(0, 0, 1) = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Αυτό το διάνυσμα είναι κάθετο στην S στο σημείο $(0, 0, 1)$, άρα, για να βρούμε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$, το διαιρούμε με το μήκος του και παίρνουμε

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(0, 0, 1)}{\|\nabla f(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

▲

Παράδειγμα 9 Θεωρήστε δύο αγωγούς, έναν θετικά και έναν αρνητικά φορτισμένο. Μεταξύ τους δημιουργείται ένα ηλεκτρικό δυναμικό. Αυτό το δυναμικό είναι μια συνάρτηση $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (ένα παράδειγμα *βαθμωτού* πεδίου). Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Από το Θεώρημα 14 γνωρίζουμε ότι το $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στις επιφάνειες στάθμης της ϕ. Αυτές οι επιφάνειες στάθμης καλούνται ***ισοδυναμικές επιφάνειες***, διότι κατά μήκος τους το δυναμικό είναι σταθερό (βλ. Σχήμα 2.6.6).



Σχήμα 2.6.6 Οι ισοδυναμικές επιφάνειες (οι διακεκομμένες γραμμές) είναι ορθογώνιες με το ηλεκτρικό πεδίο E.

▲

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ στο σημείο $(1, 1, 2)$ κατά την κατεύθυνση $(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$ είναι $2\sqrt{5}$.

2. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται και κατά τις δεδομένες κατευθύνσεις:
   (α) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
   (β) $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
   (γ) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$, $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$
   (δ) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j}$

3. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται κατά τις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων που είναι *παράλληλα* στο δεδομένο διάνυσμα:
   (α) $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0) = (e, e)$, $\mathbf{d} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
   (β) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, $\mathbf{d} = (1, -1, 1)$
   (γ) $f(x, y, z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$

4. Περπατάτε πάνω στο γράφημα της $f(x, y) = y\cos(\pi x) - x\cos(\pi y) + 10$ και στέκεστε στο σημείο $(2, 1, 13)$. Βρείτε μια κατεύθυνση xy κατά την οποία πρέπει να περπατήσετε ώστε να παραμείνετε στο ίδιο επίπεδο.

5. (α) Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Αν $\mathbf{v}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της κατά κατεύθυνση παραγώγου της f στο $\mathbf{x}_0$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ είναι $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.
   (β) Έστω $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3$. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της κατά κατεύθυνση παραγώγου της f στο σημείο $(1, 2, 3)$.

6. Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στην καμπύλη $x^3 + xy + y^3 = 11$ στο σημείο $(1, 2)$.

7. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $f(x, y, z) = xyz$ κατά την κατεύθυνση που είναι κάθετη στην επιφάνεια $yx^2 + xy^2 + yz^2 = 3$ στο $(1, 1, 1)$.

8. Βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα των παρακάτω επιφανειών στα δεδομένα σημεία:
   (α) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$, στο σημείο $(1, 2, \frac{1}{3})$
   (β) $y^2 - x^2 = 3$, στο σημείο $(1, 2, 8)$
   (γ) $xyz = 1$, στο σημείο $(1, 1, 1)$

9. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου των παρακάτω επιφανειών $z = f(x, y)$ στο σημείο που υποδεικνύεται:
   (α) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, στο σημείο $(1, 2, -3)$
   (β) $z = (\cos x)(\cos y)$, στο σημείο $(0, \pi/2, 0)$
   (γ) $z = (\cos x)(\sin y)$, στο σημείο $(0, \pi/2, 1)$

10. Υπολογίστε την κλίση ∇f καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:
   (α) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   (β) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
   (γ) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

11. Για τις συναρτήσεις της Άσκησης 10, ποια είναι η κατεύθυνση ταχύτερης αύξησης στο σημείο $(1, 1, 1)$; [Ο Οδηγός μελέτης περιέχει τη λύση μόνο για το ερώτημα (γ).]

12. Δείξτε ότι ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ στο σημείο $(0, 0, 2)$ είναι το $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

13. Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\cos(xy) = e^z - 2$ στο $(1, \pi, 0)$.

14. Επαληθεύστε τα Θεωρήματα 13 και 14 για την $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

15. Δείξτε ότι από τον ορισμό που ακολουθεί το Θεώρημα 14 παίρνουμε, ως ειδική περίπτωση, τον τύπο για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x, y)$, θεωρώντας το γράφημα ως μια επιφάνεια στάθμης της $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ (βλ. Ενότητα 2.3).

16. Έστω $f(x, y) = -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ για (x, y) τέτοια ώστε $x^2 + y^2 < 1$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα με συνιστώσες $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία.

17. Για τις παρακάτω συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, βρείτε τα ∇f και $\mathbf{g}'$ και υπολογίστε την $(f \circ \mathbf{g})'(1)$.
   (α) $f(x, y, z) = xz + yz + xy$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$
   (β) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$
   (γ) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)\log\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

18. Υπολογίστε την κατά κατεύθυνση παράγωγο της f κατά τις δεδομένες κατευθύνσεις $\mathbf{v}$ και στα δεδομένα σημεία P.

(α) $f(x,y,z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$,
$\mathrm{P} = (4,-2,-1)$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{14}(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

(β) $f(x,y,z) = x^{yz}$, $\mathrm{P} = (e,e,0)$, $\mathbf{v} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j} + \frac{4}{13}\mathbf{k}$

19. Στέκεστε πάνω στο γράφημα της $f(x,y) = 100 - 2x^2 - 3y^2$ στο σημείο $(2,3,65)$.

(α) Ποιες είναι οι συντεταγμένες xy του υψηλότερου σημείου του γραφήματος;

(β) Δείξτε ότι η κλίση της f στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα (α) είναι το μηδενικό διάνυσμα.

20. Βρείτε τα δύο σημεία του υπερβολοειδούς $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$, όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $2x + 2y + z = 5$.

21. Έστω $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r = \|\mathbf{r}\|$. Αποδείξτε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

22. Ο Captain Ralph αντιμετωπίζει προβλήματα κοντά στη φωτεινή πλευρά του Ερμή. Η θερμοκρασία του σκάφους όταν βρίσκεται στη θέση (x,y,z) δίνεται από την $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, όπου τα x, y και z μετριούνται σε μέτρα. Την τρέχουσα χρονική στιγμή βρίσκεται στο $(1,1,1)$.

(α) Κατά ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί ώστε η θερμοκρασία να μειωθεί όσο το δυνατόν ταχύτερα;

(β) Αν το σκάφος ταξιδεύει με e^8 μέτρα το δευτερόλεπτο, πόσο γρήγορα θα μειωθεί η θερμοκρασία αν κινηθεί κατά αυτή την κατεύθυνση;

(γ) Δυστυχώς, το μέταλλο του σκάφους θα ραγίσει αν ψυχθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $\sqrt{14}e^2$ βαθμούς το δευτερόλεπτο. Περιγράψτε το σύνολο των δυνατών κατευθύνσεων κατά τις οποίες μπορεί να κινηθεί το σκάφος ώστε η θερμοκρασία να μειωθεί όχι ταχύτερα από αυτό τον ρυθμό.

23. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι *ανεξάρτητη από τη δεύτερη μεταβλητή* αν υπάρχει συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x,y) = g(x)$ για κάθε x στον $\mathbb{R}$. Υπολογίστε το ∇f συναρτήσει της g' σε αυτή την περίπτωση.

24. Έστω f και g συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}$. Υποθέστε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Δείξτε ότι οι σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων περιέχονται στα σύνολα στάθμης της f, δηλαδή η f είναι σταθερή σε αυτές τις σφαίρες.

25. Μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ καλείται *άρτια* συνάρτηση αν $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x}$ στον $\mathbb{R}^n$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και άρτια, βρείτε την $\mathbf{D}f$ στην αρχή των αξόνων.

26. Υποθέστε ότι ένα βουνό έχει σχήμα ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = c - ax^2 - by^2$, όπου a, b και c είναι θετικές σταθερές, x και y είναι οι συντεταγμένες του χάρτη (ανατολή–δύση και βορράς–νότος) και z είναι το ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (τα x, y, z μετριούνται όλα σε μέτρα). Κατά ποια κατεύθυνση αυξάνεται γρηγορότερα το ύψος στο σημείο $(1,1)$; Αν αφήσουμε έναν βόλο στο $(1,1)$, κατά ποια κατεύθυνση θα ξεκινήσει να κυλάει;

27. Ένας μηχανικός θέλει να κατασκευάσει μια σιδηροδρομική γραμμή που να ανεβαίνει το βουνό της Άσκησης 26. Η κλίση του βουνού είναι πολύ απότομη για την ισχύ των μηχανών. Ποιες κατευθύνσεις μπορούν να ακολουθήσουν οι ράγες στο σημείο $(1,1)$ ώστε να ανεβαίνουν με κλίση 3% — δηλαδή με γωνία με εφαπτομένη 0,03; (Υπάρχουν δύο δυνατότητες.) Κάντε ένα σχέδιο σημειώνοντας τις δύο δυνατές κατευθύνσεις με κλίση 3% στο $(1,1)$.

28. Στην ηλεκτροστατική, η δύναμη $\mathbf{P}$ με την οποία έλκονται μεταξύ τους δύο αντίθετα φορτισμένα σωματίδια δίνεται από την $\mathbf{P} = k(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)$ (*νόμος του Coulomb*), όπου k είναι μια σταθερά και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Δείξτε ότι η $\mathbf{P}$ είναι η κλίση της $f = -k/\|\mathbf{r}\|$.

29. Το ηλεκτροστατικό δυναμικό V που δημιουργούν δύο άπειρα παράλληλα νήματα με γραμμικές πυκνότητες φορτίου λ και $-\lambda$ είναι $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$, όπου $r_1^2 = (x-x_0)^2+y^2$ και $r_2^2 = (x+x_0)^2+y^2$. Θεωρούμε ότι τα νήματα έχουν τη διεύθυνση του άξονα z και διέρχονται από το επίπεδο xy στα $(-x_0,0)$ και $(x_0,0)$. Βρείτε το $\nabla V(x,y)$.

30. Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις f κατά μήκος της διαδρομής $\mathbf{c}(t)$:

(α) $f(x,y) = xy$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(β) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

31. Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο εκτινάσσεται από το σημείο $(1,1,\sqrt{3})$ της επιφάνειας $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ κατά την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια με φορά προς το επίπεδο xy τη χρονική στιγμή $t = 0$, με ταχύτητα 10 μονάδων το δευτερόλεπτο. Πότε και σε ποιο σημείο θα συναντήσει το επίπεδο xy;

32. Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και θεωρήστε την $\mathbf{D}f(x,y,z)$ ως μια γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο πυρήνας της $\mathbf{D}f$ (δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων που απεικονίζονται στο μηδέν) είναι το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που είναι ορθογώνιο με το ∇f.

Επαναληπτικές ασκήσεις Κεφαλαίου 2

1. Περιγράψτε τα γραφήματα των:

(α) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$

(β) $f(x, y) = xy + 3x$

2. Περιγράψετε μερικές κατάλληλες επιφάνειες στάθμης και τομές των γραφημάτων των:

(α) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

(β) $f(x, y, z) = x^2$

(γ) $f(x, y, z) = xyz$

3. Υπολογίστε την παράγωγο $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = (x^2 y, e^{-xy})$

(β) $f(x) = (x, x)$

(γ) $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$

(δ) $f(x, y, z) = (x, y, z)$

4. Υποθέστε ότι $f(x, y) = f(y, x)$ για κάθε (x, y). Αποδείξτε ότι

$$(\partial f/\partial x)(a, b) = (\partial f/\partial y)(b, a).$$

5. Έστω $f(u, v) = (\cos u, v + \sin u)$ και $g(x, y, z) = (x^2 + \pi y^2, xz)$. Υπολογίστε την $D(f \circ g)$ στο $(0, 1, 1)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

6. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε την $D(f \circ g)(-2, 1)$ για τις συναρτήσεις $f(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, u^2 v - w^3)$ και $g(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.

7. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε την $D(f \circ g)(-1, 2)$ για τις συναρτήσεις $f(u, v, w) = (v^2 + w^2, u^3 - vw, u^2 v + w)$ και $g(x, y) = (3x + 2y, x^3 y, y^2 - x^2)$.

8. Έστω $f(x, y) = (xy, \frac{x}{y}, x + y)$ και $g(w, s, t) = (we^s, se^{wt})$. Βρείτε την $D(f \circ g)(3, 1, 0)$.

9. Έστω η διαδρομή $\mathbf{r}(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(\pi t), t)$. Πού θα τμήσει η εφαπτόμενη ευθεία της $\mathbf{r}$ στο $t = 5$ το επίπεδο xy;

10. Έστω $f(x, y) = x^2 e^{-xy}$.

(α) Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο γράφημα της f στο $(1, 2)$.

(β) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο $(1, 2)$.

(γ) Ποιο σημείο της επιφάνειας που δίνεται από την $z = x^2 - y^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο που βρήκατε στο (β);

11. Έστω $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία.

12. Έστω $F(u, v)$ και $u = h(x, y, z)$, $v = k(x, y, z)$ (παραγωγίσιμες) πραγματικές συναρτήσεις και έστω ότι η $f(x, y, z)$ ορίζεται από την $f(x, y, z) = F(h(x, y, z), k(x, y, z))$. Βρείτε έναν τύπο για την κλίση της f συναρτήσει των μερικών παραγώγων των F, h και k.

13. Βρείτε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2, (x_0, y_0) = (1, 1)$

(β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2, (x_0, y_0) = (2, -1)$

(γ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy, (x_0, y_0) = (-1, -1)$

(δ) $f(x, y) = \log(x + y) + x\cos y + \arctan(x + y)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

(ε) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

(στ) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$

14. Υπολογίστε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο καθεμίας από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που υποδεικνύεται.

(α) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $(1, 1, 1)$

(β) $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$, $(1, 1, 1)$

(γ) $(\cos x)(\cos y)e^z = 0$, $(\pi/2, 1, 0)$

(δ) $e^{xyz} = 1$, $(1, 1, 0)$

15. Σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = 1/xy$

(β) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$

16. Θεωρήστε τη συνάρτηση θερμοκρασίας $T(x, y) = x\sin y$. Σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης. Υπολογίστε το ∇T και εξηγήστε τη σημασία του.

17. Βρείτε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy - 1}{x}$

(β) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|(x + y)/(x - y)|}$, $x \neq y$

18. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y, z) = xe^z + y\cos x$

(β) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{10}$

(γ) $f(x, y, z) = (x^2 + y)/z$

19. Υπολογίστε την $\frac{\partial}{\partial x}[x \exp(1 + x^2 + y^2)]$.

20. Έστω ότι οι $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ δίνονται από τις $f(x, z) = (x^2 - y^2, 0, \sin(xy), 1)$ και $g(x, y) = (ye^{x^2}, xe^{y^2})$. Υπολογίστε την $D(f \circ g)(1, 2)$.

21. Έστω $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2+10)}$. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $(2, 1)$ κατά την κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.

22. Έστω $y(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που ορίζεται πεπλεγμένα από την $F(x, y(x)) = 0$. Από την Άσκηση 19(α) της Ενότητας 2.5 γνωρίζουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Θεωρήστε την επιφάνεια $z = F(x, y)$ και υποθέστε ότι η F είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς x και ως προς y, δηλαδή $\partial F/\partial x > 0$ και $\partial F/\partial y > 0$. Θεωρώντας το γράφημα και το επίπεδο $z = 0$, δείξτε ότι, για σταθερό z ίσο με 0, το y πρέπει να *μειώνεται* καθώς αυξάνεται το x και το x πρέπει να *μειώνεται* καθώς αυξάνεται το y. Συμφωνεί αυτό με το αρνητικό πρόσημο στον τύπο της dy/dx;

23. (α) Θεωρήστε το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ [Σχήμα 2.Ε.1(α)]. Έστω ότι το (x_0, y_0) ανήκει σε μια καμπύλη στάθμης C, οπότε το $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο σε αυτή την καμπύλη. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος είναι το επίπεδο που (i) περιέχει την ευθεία που είναι κάθετη στο $\nabla f(x_0, y_0)$ και ανήκει στο οριζόντιο επίπεδο $z = f(x_0, y_0)$ και (ii) έχει κλίση $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ως προς το επίπεδο xy.
(Με τον όρο *κλίση* ενός επιπέδου P ως προς το επίπεδο xy εννοούμε την εφαπτομένη της γωνίας θ, $0 \le \theta \le \pi$, που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{p}$ στο P με κατεύθυνση προς τα πάνω με το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{k}$.)

(β) Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f(x, y) = (x + \cos y)x^2$ στο $(1, 0, 2)$ είναι αυτό που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.Ε.1(α).

24. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$ στο σημείο $(1, -2, 5)$. Εξηγήστε τη γεωμετρική σημασία της κλίσης της $f(x, y) = x^2 + y^2$ (βλ. Άσκηση 23) για αυτή την επιφάνεια.

25. Κατά ποια κατεύθυνση είναι ίση με το μηδέν η κατά κατεύθυνση παράγωγος της $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ στο $(1, 1)$;

26. Βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο δεδομένο σημείο και κατά τη δεδομένη κατεύθυνση.

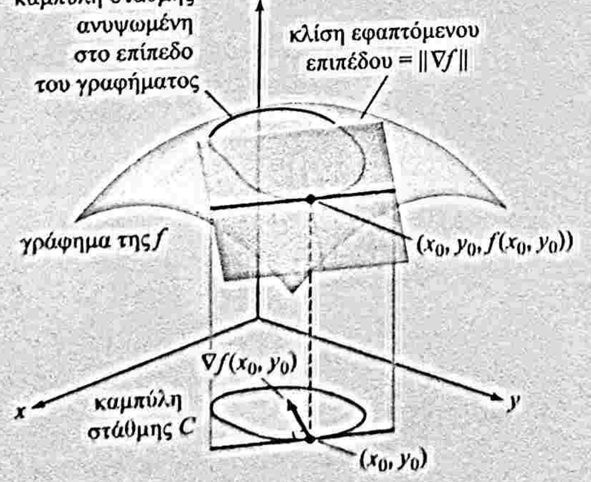
(α) $f(x, y, z) = e^x \cos(yz)$, $p_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$

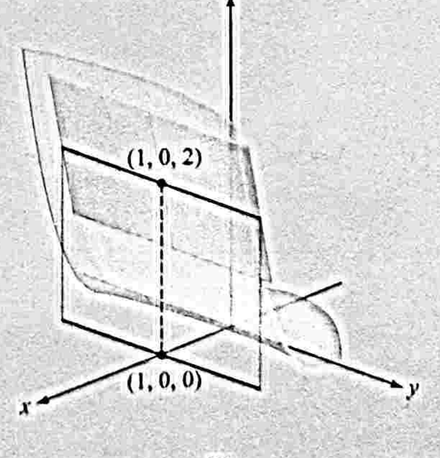
(β) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $p_0 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (10, -1, 2)$

27. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο και το κάθετο διάνυσμα στο υπερβολοειδές $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ στο $(3, 5, -4)$.

28. Έστω $(x(t), y(t))$ μια διαδρομή στο επίπεδο, $0 \le t \le 1$, και έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση C^1 δύο μεταβλητών. Υποθέστε ότι $(dx/dt)f_x + (dy/dt)f_y \le 0$. Δείξτε ότι $f(x(1), y(1)) \le f(x(0), y(0))$.

29. Ένα έντομο βρίσκεται μέσα σε τοξικό περιβάλλον. Το επίπεδο τοξικότητας δίνεται από την $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. Το έντομο βρίσκεται στο $(-1, 2)$. Κατά ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί ώστε να ελαττωθεί το ταχύτερο δυνατό η τοξικότητα;





Σχήμα 2.Ε.1 (α) Η σχέση μεταξύ της κλίσης μιας συνάρτησης και του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος [Άσκηση 23(α)]. Για το συγκεκριμένο εφαπτόμενο επίπεδο που έχει σχεδιαστεί στο (β) βλ. Άσκηση 23(β).

30. Βρείτε την κατεύθυνση κατά την οποία αυξάνεται ταχύτερα η συνάρτηση $w = x^2 + xy$ στο σημείο $(-1, 1)$. Ποιο είναι το μέτρο του ∇w σε αυτό σημείο; Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία αυτού του μέτρου.

31. Έστω f μια βαθμωτή συνάρτηση που ορίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f είναι ***ομογενής βαθμού*** p στο S αν $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ για κάθε πραγματικό λ και για κάθε $\mathbf{x}$ στο S για το οποίο $\lambda \mathbf{x} \in S$.

(α) Αν μια τέτοια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}$, δείξτε ότι $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$. Αυτό είναι γνωστό ως ***θεώρημα του Euler*** για τις ομογενείς συναρτήσεις. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για σταθερό $\mathbf{x}$, ορίστε την $g(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x})$ και υπολογίστε την $g'(1)$.]

(β) Βρείτε το p και ελέγξτε το θεώρημα του Euler για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = x - 2y - \sqrt{xz}$ στο χωρίο όπου $xz > 0$.

32. Αν $z = [f(x - y)]/y$ (όπου η f είναι παραγωγίσιμη και $y \neq 0$), δείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα $z + y(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.

33. Αν θέσουμε $z = f((x + y)/(x - y))$ για κάποια συνάρτηση f κλάσης C^1, δείξτε ότι

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

34. Έστω ότι η f έχει μερικές παραγώγους $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$, όπου $i = 1, 2, \ldots, n$, σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ ενός ανοιχτού υποσυνόλου U του $\mathbb{R}^n$. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\mathbf{x}_0$ του U, δείξτε ότι $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_i = 0$ για κάθε i.

35. Θεωρήστε τις συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{R}^2$ ως εξής:

(i) $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

(ii) $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^4)$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

(α) Δείξτε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, οι μερικές παράγωγοι $\partial f(x, y)/\partial x$ και $\partial f(x, y)/\partial y$ υπάρχουν για κάθε (x, y) στον $\mathbb{R}^2$ και υπολογίστε αυτές τις παραγώγους συναρτήσει των x και y.

(β) Εξηγήστε γιατί οι συναρτήσεις που περιγράφονται στα (i) και (ii) είναι ή δεν είναι παραγωγίσιμες στο $(0, 0)$.

36. Υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(x, y)$ σε όλα τα σημεία (x, y) του $\mathbb{R}^2$ για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x, y) = x^2y^2 \log(x^2 + y^2)$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

(β) $f(x, y) = xy \sin[1/(x^2 + y^2)]$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

37. Βρείτε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(1, 1)$ κατά την κατεύθυνση $(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$:

(α) $f(x, y) = x \tan^{-1}(x/y)$

(β) $f(x, y) = \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

(γ) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

38. (α) Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Βρείτε τα $\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ και ένα διάνυσμα που να έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{u}$, αλλά μοναδιαίο μήκος.

(β) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $e^{xy} \sin(xyz)$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ στο $(0, 1, 1)$.

39. Έστω $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ το ύψος ενός βουνού στη θέση (x, y). Κατά ποια κατεύθυνση, με αφετηρία το $(1, 0)$, θα πρέπει να ξεκινήσει κανείς να περπατάει ώστε να ανέβει όσο το δυνατόν ταχύτερα;

40. Υπολογίστε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

στο $x = 1, y = 2$.

41. (α) Δώστε μια προσεκτική διατύπωση της γενικής μορφής του κανόνα της αλυσίδας.

(β) Έστω $f(x, y) = x^2 + y$ και $\mathbf{h}(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$. Έστω $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$. Υπολογίστε την dg/du στο $u = 0$ απευθείας *και* χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

42. (α) Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης της $f(x, y) = -x^2 - 9y^2$ για $c = 0, -1, -10$.

(β) Στο σχήμα σας, σχεδιάστε το ∇f στο $(1, 1)$. Σχολιάστε.

43. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένα σωματίδιο εκτινάσσεται από το σημείο $(1, 1, 1)$ της επιφάνειας $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ κάθετα ως προς την επιφάνεια με ταχύτητα 10 μονάδων το δευτερόλεπτο. Ποια χρονική στιγμή θα διαπεράσει τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 103$;

44. Σε ποιο σημείο ή σημεία της επιφάνειας της Άσκησης 43 είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια παράλληλο στην ευθεία $x = y = z$;

45. Υπολογίστε τις $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$ αν

$$z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \qquad u = e^{-x-y}, \qquad v = e^{xy}$$

(α) με αντικατάσταση και απευθείας υπολογισμό και (β) με τον κανόνα της αλυσίδας.

46. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους όπως στην Άσκηση 45, αν $z = uv$, $u = x + y$ και $v = x - y$.

47. Ποιο είναι το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό; Υποθέστε ότι $w = f(x, y)$ και $y = x^2$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Συνεπώς, $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, οπότε $\partial w/\partial y = 0$. Βρείτε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να διαπιστώσετε ότι αυτό είναι όντως λάθος.

48. Μια βάρκα πλέει κινούμενη βορειοανατολικά με 20 km/h. Αν θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία πέφτει με ρυθμό 0,2°C/km κατά τη βορειοανατολική κατεύθυνση και με ρυθμό 0,3°C/km κατά την ανατολική κατεύθυνση, βρείτε τον χρονικό ρυθμό μείωσης της θερμοκρασίας που παρατηρείται στη βάρκα.

49. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε έναν τύπο για την $(d/dt)\exp[f(t)g(t)]$.

50. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βρείτε έναν τύπο για την $(d/dt)(f(t)^{g(t)})$.

51. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = [\ln(1 + x^2 + 2z^2)]/(1 + y^2)$ και τη διαδρομή $\mathbf{c}(t) = (t, 1 - t^2, \cos t)$.

52. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2/(2 + \cos y)$ και τη διαδρομή $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

53. Υποθέστε ότι η $u(x, t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $u_t + uu_x = 0$ και ότι το x, σαν συνάρτηση $x = f(t)$ του t, ικανοποιεί την $dx/dt = u(x, t)$. Αποδείξτε ότι η $u(f(t), t)$ είναι σταθερή ως προς t.

54. Η μετατόπιση στη χρονική στιγμή t και σε οριζόντια θέση x μιας χορδής βιολιού δίνεται από την $u = \sin(x - 6t) + \sin(x + 6t)$. Υπολογίστε την ταχύτητα της χορδής στο $x = 1$ όταν $t = \frac{1}{3}$.

55. Ο ***νόμος των ιδανικών αερίων*** $PV = nRT$ συνδέει μια σταθερά R, το πλήθος n των μορίων του αερίου, τον όγκο V, τη θερμοκρασία σε Kelvin T και την πίεση P.

(α) Δείξτε ότι καθένα από τα n, P, T, V είναι συνάρτηση των υπόλοιπων μεταβλητών και προσδιορίστε τις εξισώσεις ορισμού τους.

(β) Υπολογίστε τις $\partial V/\partial T$, $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$ και δείξτε ότι το γινόμενό τους ισούται με -1.

56. Η ***δυνητική θερμοκρασία*** θ ορίζεται συναρτήσει της θερμοκρασίας T και της πίεσης p από την

$$\theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{0,286}.$$

Η θερμοκρασία και η πίεση μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις της θέσης (x, y, z) στην ατμόσφαιρα αλλά και του χρόνου t.

(α) Βρείτε τύπους για τις $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$, $\partial\theta/\partial z$, $\partial\theta/\partial t$ συναρτήσει των μερικών παραγώγων των T και p.

(β) Η συνθήκη $\partial\theta/\partial z < 0$ θεωρείται ότι περιγράφει μια ασταθή ατμόσφαιρα, διότι μια απλή ανοδική ή καθοδική ώθηση έχει ως αποτέλεσμα μεγάλες κατακόρυφες μετακινήσεις αέριων μαζών. Οι μετεωρολόγοι χρησιμοποιούν τον τύπο

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p}\right),$$

όπου $g = 32{,}2$ και C_p είναι μια θετική σταθερά. Πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία κατά την ανοδική κατεύθυνση σε μια ασταθή ατμόσφαιρα;

57. Ο ειδικός όγκος V, η πίεση P και η θερμοκρασία T ενός αερίου van der Waals συνδέονται μέσω της $P = RT/(V - \beta) - \alpha/V^2$, όπου α, β και R είναι σταθερές.

(α) Εξηγήστε γιατί οποιαδήποτε δύο από τα V, P και T μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες μεταβλητές που καθορίζουν την τρίτη μεταβλητή.

(β) Βρείτε τις $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$, $\partial V/\partial T$. Βρείτε ποιες μεταβλητές είναι σταθερές και δώστε τη φυσική ερμηνεία κάθε μερικής παραγώγου.

(γ) Επαληθεύστε ότι $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$ (όχι $+1$).

58. Το ύψος h του ηφαιστείου Mauna Loa της Χαβάης περιγράφεται (χοντρικά) από τη συνάρτηση $h(x, y) = 2{,}59 - 0{,}00024y^2 - 0{,}00065x^2$, όπου h είναι το ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας σε μίλια και x και y είναι οι αποστάσεις σε μίλια προς ανατολή-δύση και βορρά-νότο από την κορυφή του βουνού. Στο $(x, y) = (-2, -4)$:

(α) Πόσο γρήγορα αυξάνεται το ύψος κατά την κατεύθυνση $(1, 1)$ (δηλαδή κατά τη βορειοανατολική κατεύθυνση); Εκφράστε την απάντησή σας σε μίλια ύψους ανά μίλια οριζοντίως διανυόμενης απόστασης.

(β) Ποια είναι κατεύθυνση της πιο απότομης ανηφορικής διαδρομής;

59. (α) Κατά ποια κατεύθυνση είναι ίση με μηδέν η κατά κατεύθυνση παράγωγος της $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ στο $(1, 1)$;

(β) Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα για ένα οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0) του πρώτου τεταρτημορίου.

(γ) Περιγράψτε τις καμπύλες στάθμης της f. Ειδικότερα, σχολιάστε τις με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β).

60. (α) Δείξτε ότι η καμπύλη $x^2 - y^2 = c$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $dy/dx = x/y$ για *οποιαδήποτε* τιμή του c.

(β) Σχεδιάστε μερικές από τις καμπύλες $x^2 - y^2 = c$, φερ' ειπείν για $c = \pm 1$. Σχεδιάστε ένα μικρό τμήμα της κλίσης x/y σε διάφορα σημεία (x, y) αυτών των καμπυλών και επιβεβαιώστε ότι τα τμήματα αυτά φαίνονται να είναι εφαπτόμενα στην καμπύλη. Τι συμβαίνει όταν $y = 0$; Τι συμβαίνει όταν $c = 0$;

61. Υποθέστε ότι η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση μίας μεταβλητής και ότι η συνάρτηση $u = g(x, y)$ ορίζεται από την

$$u = g(x, y) = xyf\left(\frac{x + y}{xy}\right).$$

Δείξτε ότι η u ικανοποιεί μια (μερική) διαφορική εξίσωση της μορφής

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$$

και βρείτε τη συνάρτηση $G(x, y)$.

62. (α) Έστω F μια συνάρτηση μίας μεταβλητής και f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Δείξτε ότι το διάνυσμα κλίσης της $g(x, y) = F(f(x, y))$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα κλίσης της $f(x, y)$.

(β) Έστω $f(x, y)$ και $g(x, y)$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\nabla f = \lambda \nabla g$ για κάποια συνάρτηση $\lambda(x, y)$. Ποια σχέση συνδέει τις καμπύλες στάθμης των f και g; Εξηγήστε γιατί μπορεί να υπάρχει κάποια συνάρτηση F τέτοια ώστε $g(x, y) = F(f(x, y))$.